

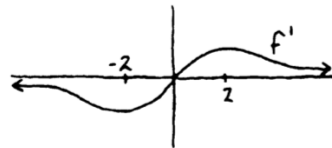
3장 미분

연습문제 해답

3.1 개요

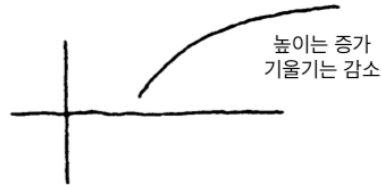
3.2 미분의 정의와 응용

1. $x = 0$ 에서 기울기는 0이므로 $f'(0) = 0$. $x = -100$ 에서 곡선이 천천히 떨어지고 있으므로 $f'(-100)$ 은 작은 음수다. 비슷하게 $f'(100)$ 은 작은 양수다. $x = 2$ 에서의 기울기는 양수이고 이 곡선에서 가장 큰 기울기이므로 $f'(2)$ 는 양수이고 아래 그림에서와 같이 f' 의 그래프는 $x = 2$ 에서 꼭짓점을 갖는다.

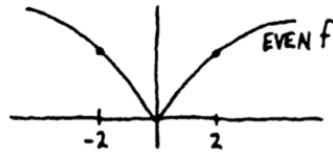


2. p 가 증가한다면, S 는 감소한다. dS/dp 는 음수일 것이다.
3. 미분값이 음수이므로, t 가 증가할수록 y 는 감소한다. 우물벽의 끝부분까지의 거리가 줄어들고 있고 따라서 두레박은 초당 2미터씩 위로 움직이고 있는 중이다.
4. x 가 증가한다면, y 가 증가한다. 따라서 x 가 감소한다면 y 는 감소한다.
5. (a) 13.7살일 때, 연간 2센치미터로 자라고 있다. 그러므로 14살까지 $2\text{cm}/\text{년} \times 0.3 \text{년} = 0.6\text{cm}$ 더 자랄 것이다.
(b) 13.7살인 순간에 미분값이 2인데, 13.7살부터 14살까지 그대로 이 값(2)을 유지하지 않을 수도 있기 때문이다.
6. (a) $[0, x + \Delta x]$ 주민의 수 - $[0, x]$ 주민의 수 = $[x, x + \Delta x]$ 주민의 수
(b) 구간 $[x, x + \Delta x]$ 에서의 인구밀집도 (km 당 주민의 수)
(c) x 위치에서의 순간 인구밀집도
(d) 인구 밀집도는 음수가 될 수 없다.
7. (a) 선희의 월급이 광수 월급이 오른 것보다 두 배 오른다.
(b) 선희의 월급이 광수 월급이 오른 것의 반만 오른다.

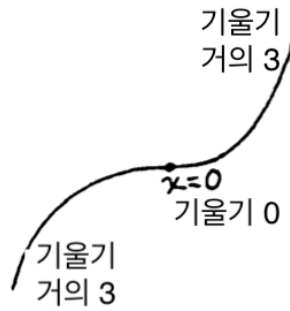
- (c) 선희의 월급은 광수 월급이 오른 것만큼 줄어든다.
- (d) 선희의 월급은 변함이 없다.
8. $f'(x)$ 의 단위는 킬로미터당 리터이고 (리터당 킬로미터가 아니고) 언제나 양수이다. 뱅크 승용차는 1km를 가는 데 오토바이보다 더 많은 양의 기름이 들고, 따라서 뱅크 승용차의 f' 의 값이 오토바이보다 크다.
9. (a) 문제의 의미는 두 곡선이 $x = 2$ 에서 높이가 같다면 기울기도 같다는 것이므로 거짓이다.
- (b) 높이가 증가하더라도 기울기가 증가하지 않을 수 있다. (아래 그림 참조)



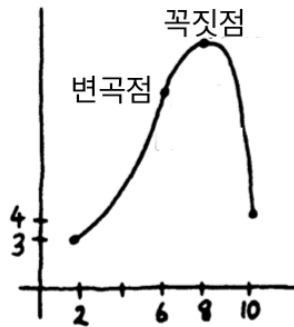
- (c) 참이다. 곡선이 반복되면 기울기도 반복된다.
- (d) 거짓이다. f 가 우함수이면 그래프가 y -축에 대해 대칭이다. 예를 들어 $x = -2$ 에서의 기울기는 $x = 2$ 에서의 기울기와 반대다. 실제로 $f'(-x) = -f'(x)$ 이므로 f' 은 기함수다. (아래 그림 참조)



10. (시각 6일 때 차량의 속도) > (위치 $f(6)$ 에서의 제한 속도)이므로 $|f'(6)| > L(f(6))$. ($f'(6) > L(6)$ 이 아님)
11. (a) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1$
- (b) f 의 그래프는 직선 $y = x$ 이다. 모든 점에서 기울기가 1이므로 $f'(x) = 1$ 이다.
- (c) 수직선 위의 한 물체가 시각 t 일 때 위치가 $f(t)$ 이면, 이 물체는 시간당 1km의 속도로 오른쪽으로 움직이고 있다. 따라서 $f'(t) = 1$ 이다.
12. g' 의 그래프로부터, x 는 -10000이면 $g'(x)$ 는 3에 가깝고, $x = 0$ 일 때 0으로 줄어들다가 다시 증가하여 $x \rightarrow \infty$ 일 때 3으로 다가간다. 따라서 g 의 그래프는 왼쪽 끝에서는 거의 3에 가까운 기울기를 갖고, 0으로 줄어들다가 다시 3을 향해 증가한다. g 의 그래프의 높이에 대해서는 정보가 없다. (아래 그림 참고)



13. (a) 온도는 시간당 6° 씩 오르고 있다. (나쁜 소식) 그러나 이 시간당 6° 라는 숫자는 매시간마다 시간당 4° 만큼씩 떨어지고 있는 중이다. (좋은 소식)
- (b) 온도는 시간당 6° 씩 내리고 있다. (좋은 소식) 그리고 이 시간당 -6° 라는 숫자는 매시간마다 시간당 4° 만큼씩 더 떨어지고 있는 중이다 (더 좋은 소식)
- (c) 온도는 변하고 있지 않다. 여전히 높은 온도가 유지되는 중이다.
14. (a) 시간당 1km/h 만큼씩 가속하면서 4 km/h 의 빠르기로 왼쪽으로 움직이고 있다.
- (b) 시간당 2km/h 만큼씩 감속하면서 5km/h 의 빠르기로 오른쪽으로 움직이고 있다.
- (c) 잠시 멈춰있겠지만, 시간당 2km/h 만큼씩 가속하는 중이다.
- (d) 2km/h 의 빠르기로 오른쪽으로 움직이고 있고, 이 순간에 빠르기는 변하지 않는다.
15. 그래프는 $[2, 8]$ 구간에서 올라가고, $[8, 10]$ 구간에서는 떨어진다. 구간 $[2, 6]$ 에서는 아래로 볼록하고 구간 $[6, 10]$ 에서는 위로 볼록하다. (아래 그림 참고)



16. 1계도함수 f' 은 운전대 회전 당 앞바퀴의 회전인 “조향 비율”이다. 어떤 회전각에서의 조향이 다른 회전각에서의 조향보다 더 민감한 것은 바람직하지 않다. 즉 일정한 f' 을 원한다. 따라서 $f'' = 0$ 이 필요하다.
17. f' 은 구간 $[3, 4]$ 에서 양수다. 따라서 f 는 증가하는데, 처음에는 좀 더 급하게 증가하다가(x 단위당 $5f$ 단위씩) 점점 천천히 증가한다(x 단위당 $1f$ 단위씩). f' 이 구간 $[3, 4]$ 에서 감소하므로, 이 구간에서 f'' 은 음수다.
18. (a) 첫 60 배럴을 정제하는 데 총 400만큼의 비용이 든다.

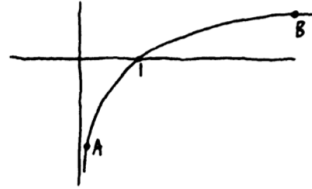
- (b) $f'(x)$ 는 x 배럴이 막 제조라인에서 나오는 순간에 배럴당 순간 정제 비용이다. 주어진 데이터에 의하면, 60배럴이 막 정제되어 나온 직후에는 순간 추가 정제 비용은 배럴당 21이지만, 100배럴을 만들어낸 후에는 정제 공정이 더 효율적이 되어서 추가 정제 비용은 배럴당 10만큼밖에 되지 않는다(101번째 배럴을 생산하는 것이 61번째 배럴을 생산하는 것보다 더 싸다).
- (c) 첫 10배럴의 총 비용은 200이고, 배럴당 평균 20이다. 10번째 배럴 후 순간 비용은 배럴당 단지 3이고 그때까지의 평균보다 훨씬 작다. 10배럴 이상을 생산한다면 정제 공정이 훨씬 효율적이다.

3.3 기본 함수의 미분

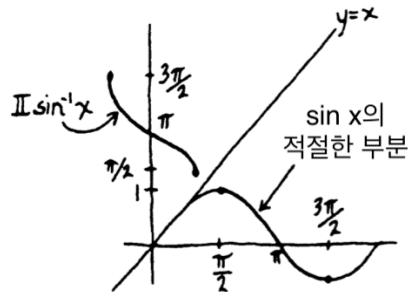
- $6x^5$
 - $D_x x^{-6} = -6x^{-7} = -6/x^7$
 - $\frac{8}{7}x^{1/7}$
 - $D_u u^{1/3} = \frac{1}{3}u^{-2/3}$
 - $\frac{dx^{-1/2}}{dx} = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$
 - $\frac{2}{3}x^{-1/3}$
 - 0
 - e^t
 - 0
- $1/z$
- $y' = 1$
- $f'(x) = 0$
- $\sec^2 t$
- $y' = 1/x, y'' = D_x x^{-1} = -x^{-2} = -1/x^2$
 - $y' = \cos x, y'' = -\sin x$
 - $y' = e^x, y'' = e^x$
- $f'(x) = D_x x^{-1/2} = -\frac{1}{2}x^{-3/2} = -1/2x^{3/2}, f'(17) = -1/2\sqrt{17^3} = -1/(2 \cdot 17\sqrt{17}) = -1/(34\sqrt{17})$
- $f(\pi) = \sin \pi = 0, f'(x) = \cos x, f'(\pi) = \cos \pi = -1$
- $-3x^{-4}$
 - $14x^{13}$
 - ~~$D_x x^{1/5} = \frac{1}{5}x^{-4/5}$~~ $D_x \sqrt{x^5} = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$
 - $D_x x^{-5} = -5x^{-6} = -5/x^6$

- (e) 1
 (f) $1/x$
 (g) $-\frac{1}{3}x^{-4/3}$
 (h) $4x^3$
 (i) $D_x x^{-4} = -4x^{-5} = -4/x^5$
 (j) $D_x x^{-1} = -x^{-2} = -1/x^2$
 (k) $D_x x^{-2} = -2x^{-3} = -2/x^3$

10. 곡선은 점 B에서 천천히 올라가고 따라서 기울기는 작은 양의 값이다. 점 B에서 x 의 값이 크기 때문에 점 B에서의 $1/x$ 의 값도 또한 작은 양의 값이다. 곡선은 점 A에서 매우 급하게 올라가고 따라서 기울기는 큰 양의 값이다. 점 A에서 x 의 값은 0보다 약간 더 큰 값이므로 점 A에서 $1/x$ 의 값도 또한 큰 양수다. (아래 그림 참조)



11. $y = \tan^{-1} x$ 라고 하자. 그러면 $-\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi$ 일 때 $x = \tan y$ 이고 $dy/dx = 1/(dx/dy) = 1/\sec^2 y = 1/(1 + \tan^2 y) = 1/(1 + x^2)$.
 12. (a) $\frac{1}{2}\pi$ 와 $3\pi/2$ 사이의 $\sin x$ 의 일부분을 $y = x$ 에 대해 대칭시킨다. (아래 그림 참조)



- (b) $\Pi \sin^{-1} x$ 위의 모든 기울기는 음수인 반면 $1/\sqrt{1-x^2}$ 는 양수이므로 $D_x \Pi \sin^{-1} x$ 는 $1/\sqrt{1-x^2}$ 이 될 수 없다. 올바른 미분을 얻는 한 가지 방법은 식(3.18)로 돌아가는 것이다. 그런데 이제 y 는 $\frac{1}{2}\pi$ 와 $3\pi/2$ 사이의 각이므로 코사인값은 음수다. 따라서 $\cos y = -\sqrt{1-x^2}$ 이고 $D_x \Pi \sin^{-1} x = -1/\sqrt{1-x^2}$ 이다.
 13. $\frac{da}{db} = -4b^{-5}$ 이다. $b = a^{-1/4}$ 이므로 $\frac{db}{da} = -\frac{1}{4}a^{-5/4}$ 이다. 그러면 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{db}{da}} &= -4a^{5/4} = -4(b^{-4})^{5/4} \quad (a = b^{-4} \text{ 이므로}) \\ &= -4b^{-5} \end{aligned}$$

따라서 역함수의 미분은 서로 역수다.

14. (a) 미분하면 속도 $\cos t$ 를 얻고, $t = 2\pi/3$ 일 때 이 값은 $-\frac{1}{2}$ 이다. 속력은 $1/2$ m/sec다.
 (b) 다시 한 번 더 미분하면 가속도 $-\sin t$ 를 얻고, $t = 2\pi/3$ 에서 이 값은 $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ 이다. 속도와 가속도의 부호가 동일하므로 이 물체는 속력이 증가하고 있는 중이다. 즉 초당 $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ 씩 증가하고 있다.
 (c) 속력은 $|\cos t|$ 이다. 이 값은 $t = 0, \pi, 2\pi$ 등에서 (최댓값 1)로 최대다. $t = -\pi/2, \pi/2, 3\pi/2$ 등에서 (최솟값 0)으로 최소다.
15. $y' = 4x^3$ 이므로 $(-2, 16)$ 에서 기울기는 $4(-2)^3 = -32$ 다. 그러므로 접선의 방정식은 $y - 16 = -32(x + 2)$ 이다. 법선의 기울기는 $\frac{1}{32}$ 이고 법선의 방정식은 $y - 16 = \frac{1}{32}(x + 2)$ 다.

3.4 미분 불가능 함수

3.5 상수곱, 합, 곱, 분수식의 미분

- $18x^5 - \sin x$
 - $10x^4 - 18x^2 - 4$
- $y = x^{-1}, y' = -x^{-2}, y'' = 2x^{-3}, y''' = -6x^{-4}, y^{(4)} = 24x^{-5} = 24/x^5$
 - $y' = \cos x, y'' = -\sin x, y''' = -\cos x, y^{(4)} = \sin x$
 - $y' = 1, y'' = 0, y''' = 0, y^{(4)} = 0$
- $\frac{3}{2}x^2$
 - $6x^2$
 - $D2x^{-3} = -6x^{-4} = -6/x^4$
 - $D\frac{1}{2}x^{-3} = -\frac{3}{2}x^{-4} = -3/2x^4$
 - $\frac{1}{3}(3x^2 + 2)$
 - (곱 법칙) $-2x^3 \sin x + 6x^2 \cos x$
 - $\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^{-1/2} \ln x = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$
 - $\sec x \cdot \sec^2 x + \tan x \cdot \sec x \tan x = \sec^3 x + \tan^2 x \sec x$
 - $2e^x(1/x) + 2e^x \ln x + 10x$
 - $2e^x + 1/x$
 - $4x^2/(1+x^2) + 8x \tan^{-1} x$
 - $x^3 \sin x \sec^2 x + x^3 \cos x \tan x + 3x^2 \sin x \tan x$
 - $-3x^{-2} = -3/x^2$
 - $D\frac{1}{3}x^{-1} = -\frac{1}{3}x^{-2} = -1/3x^2$
- $f'(r) = 5r^4, f''(r) = 5 \cdot 4r^3, \dots, f^{(5)}(r) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$
 - $f^{(4)} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1, f^{(5)}(r) = 0$
- $f(-2) = 48+4 = 52, f'(x) = 12x^3-2, f''(x) = 36x^2, f'(-2) = -96-2 = -98, f''(-2) = 144$

6. (a) (곱 법칙) $xe^x + e^x$
 (b) $xe^x + e^x + e^x = xe^x + 2e^x$
 (c) $xe^x + e^x + 2e^x = xe^x + 3e^x$
 (d) 앞의 결과를 일반화 시키면 $xe^x + ne^x$
7. (a) $\frac{(6x+x^2)3 - (1+3x)(6+2x)}{(6x+x^2)^2} = -\frac{3x^2+2x+6}{(6x+x^2)^2}$
 (b) $\frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$
 (c) $\frac{(1+3e^x)(xe^x + e^x) - xe^x \cdot 3e^x}{(1+3e^x)^2} = \frac{xe^x + e^x + 3e^{2x}}{(1+3e^x)^2}$

8.

$$\begin{aligned} D \sec x &= D \frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x \cdot 0 - (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \tan x \end{aligned}$$

9. (a) $f(x) = \begin{cases} \sin x & , 0 \leq x \leq \pi \\ -\sin x & , \pi \leq x \leq 2\pi \\ \sin x, & , 2\pi \leq x \leq 3\pi \text{ 등등} \end{cases}$ 그러므로 $f'(x) = \begin{cases} \cos x & , 0 < x < \pi \\ -\cos x & , \pi < x < 2\pi \\ \cos x, & , 2\pi < x < 3\pi \text{ 등등} \end{cases}$

(b) $f'(x)$ 는 $x \leq 2$ 일 때는 $6x^2$ 이고 $x > 2$ 일 때는 0.

10. $y' = 6x^2 + 6$ 이고 $(1, 8)$ 에서의 기울기는 $y'|_{x=1} = 12$. 접선의 방정식은 $y - 8 = 12(x - 1)$, 즉 $y = 12x - 4$ 다.

11. $y' = -4x^3, y'|_{x=2} = -32$. 법선의 기울기는 $\frac{1}{32}$. 법선의 방정식은 $y + 11 = \frac{1}{32}(x - 2)$.

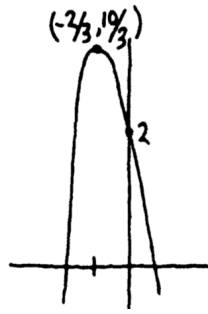
12. (a) $y' = \cos x, y'' = -\sin x$ 이고 y'' 의 값은 $0 < x < \pi$ 일 때 양수, $\pi < x < 2\pi$ 일 때 음수 등등이다. 따라서 사인 곡선은 $[0, \pi]$ 에서는 위로 볼록, $[\pi, 2\pi]$ 에서는 아래로 볼록이다. (1.3절의 [그림 1-27] 참조)

(b) $y' = 3x^2, y'' = 6x$ 이고 y'' 의 값은 $x > 0$ 이면 양수, $x < 0$ 이면 음수다. 그러므로 x^3 은 $x < 0$ 에서는 위로 볼록, $x > 0$ 에서는 아래로 볼록이다. (1.2절의 [그림 1-16] 참조)

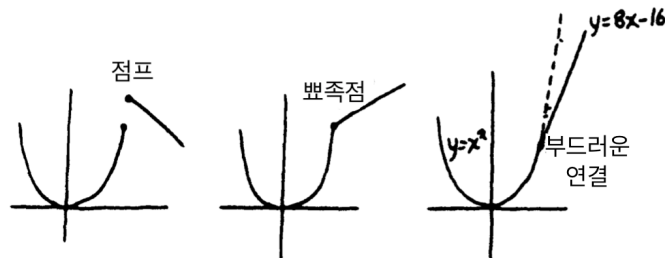
13. 속도 = $2t - 9t^2$, 가속도 = $2 - 18t$ 이다. $t = 2$ 에서 속도 = -32 이고 가속도 = -34 이다. 따라서 속력은 $32(\text{km/h})$ 이고 시간당 $34(\text{km/h})$ 만큼씩 커지고 있다.

14. $f'(x) = 2x + a$ 이다. 점 $(3, 4)$ 에서 접선의 기울기가 2이므로 $f'(3) = 2$ 이고 $2 \cdot 3 + a = 2$ 로부터 $a = -4$ 이다. f 의 그래프가 점 $(3, 4)$ 를 지나므로 $f(3) = 4$ 이고 $4 = 9 - 12 + b$ 로부터 $b = 7$ 이다.

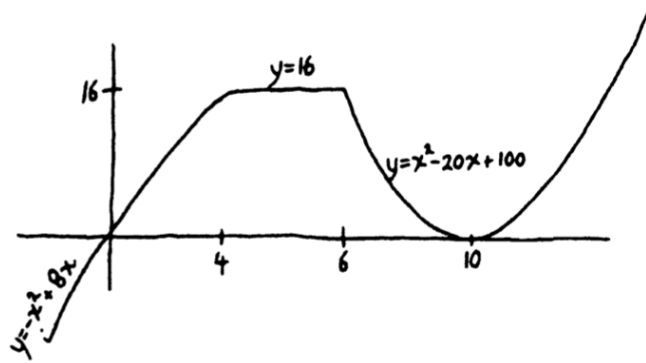
15. $y' = -6x - 4$ 이고 $x = -\frac{2}{3}$ 에서 기울기가 0이다. $x = -\frac{2}{3}$ 이면 $y = \frac{10}{3}$ 이다. (아래 그림 참고)



16. f 의 그래프는 포물선으로 시작했다가 $x = 4$ 에서 직선으로 바뀐다. 연속이기 위해서는 $x = 4$ 에서 x^2 의 높이와 $ax + b$ 의 높이가 일치할 필요가 있다. 그렇지 않으면 f 의 그래프는 점프하게 된다. (아래 맨 왼쪽 그림 참조) 그러므로 $16 = 4a + b$ 이어야 한다. 또한 $f'(x)$ 는 $x \leq 4$ 일 때 $2x$ 이고 $x > 4$ 일 때는 a 다. 부드럽게 이어지기 위해서는 $x = 4$ 에서 기울기 $2x$ 와 a 가 일치할 필요가 있다. 그렇지 않으면 f 는 뾰족점을 가지게 된다. (아래 가운데 그림 참조) 그러므로 $8 = a$ 이어야 한다. 그러면 $b = 16 - 32 = -16$ 이다. 그러면 f 의 그래프는 연속이고 뾰족점이 없게 된다 (아래 맨 오른쪽 그림 참조)



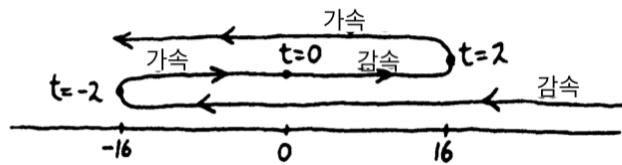
17. $y' = x \cos x + \sin x$, $y'' = x(-\sin x) + \cos x + \cos x = -x \sin x + 2 \cos x$. 그러면 $y'' + y = -x \sin x + 2 \cos x + x \sin x = 2 \cos x$.
18. $T' = 3t^2 - 15$, $T'' = 6t$. 만일 $t = 3$ 이면 $T = -18$, $T' = 12$, $T'' = 18$ 이므로 온도는 -18° 이고 (춥다), 온도가 시간당 12° 만큼씩 상승하는 중이며 (희망적임) 이 상승 비율 자체도 시간당 $18^\circ/h$ 만큼씩 증가하는 중이다 (더 다행스럽다).
19. $y = -x^2 + 8x$ 의 그래프는 포물선이고 $y' = -2x + 8$ 이므로 $x = 4$ 에서 기울기가 0이다. $x = 4$ 이면 $y = 16$ 이므로 $(4, 16)$ 이 전환점이다. $y = 16$ 의 그래프는 수평선이다. 두 그래프는 $x = 4$ 에서 높이가 같으므로 연속적으로 이어진다. 또한 $x = 4$ 에서 두 그래프 모두 기울기가 0이므로 (뾰족점 없이) 부드럽게 이어진다. $y = x^2 - 20x + 100$ 의 그래프는 포물선이고 $y' = 2x - 20$ 이므로 $x = 10$ 에서 기울기가 0이다. $x = 10$ 이면 $y = 0$ 이므로 $(10, 0)$ 이 전환점이다. 직선과 이 포물선은 $x = 6$ 에서 모두 높이가 16으로 같으므로 점프없이 연결된다. 그러나 $x = 6$ 에서 포물선의 기울기는 -8 이고 직선의 기울기는 0이므로 부드럽게 연결되지는 않는다. (아래 그림 참조)



20. $f(t) = 12t - t^3$ 이면 $f'(t) = 12 - 3t^2$, $f''(t) = -6t$ 이다. $t = \pm 2$ 이면 $f'(t) = 0$ 이고 $f'(t)$ 는 $(-\infty, -2)$ 에서는 음수, $(-2, 2)$ 에서는 양수, $(2, \infty)$ 에서는 음수다. $f''(t)$ 는 $t < 0$ 이면 양수, $t > 0$ 이면 음수다. 이를 바탕으로 정리하면 다음과 같다.

시간 구간	f' 의 부호	f'' 의 부호	물체의 움직임
$(-\infty, -2)$	음	양	왼쪽으로 움직임, 감속
$(-2, 0)$	양	양	오른쪽으로 움직임, 가속
$(0, 2)$	양	음	오른쪽으로 움직임, 감속
$(2, \infty)$	음	음	왼쪽으로 움직임, 가속

핵심적인 값들은 $f(-\infty) = \infty$, $f(-2) = -16$, $f(0) = 0$, $f(2) = 16$, $f(\infty) = -\infty$ 이다. (아래 그림 참조)



3.6 합성함수의 미분

- $6e^{6x}$
- $2 \cos 2x$
- $\frac{1}{\sqrt{1-(3-x)^2}} \cdot (-1)$
- $-10 \sin 5x$
- $x^2 \cdot \cos 5x \cdot 5 + 2x \sin 5x = 5x^2 \cos 5x + 2x \sin 5x$
- $5x \cdot e^{2x} \cdot 2 + e^{2x} \cdot 5 = 10xe^{2x} + 5e^{2x}$
- $e^x \cos e^x$
- $x^3 \cdot 6(2x+5)^5 \cdot 2 + 3x^2(2x+5)^6 = 12x^3(2x+5)^5 + 3x^2(2x+5)^6$
- $\frac{1}{5-x} \cdot (-1) = -\frac{1}{5-x}$

10. $\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\tan x$
11. $2e^{5+2x}$
12. $\frac{1}{2}(3+x^2)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{3+x^2}}$
13. $D4 \sec 5x = 4 \sec 5x \tan 5x \cdot 5 = 20 \sec 5x \tan 5x$
14. $D(\cos x)^3 = 3 \cos^2 x \cdot D \cos x = -3 \cos^2 x \sin x$
15. $\cos \frac{1}{x} \cdot D_x \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}$
16. $e^{\sqrt{x}} D_x \sqrt{x} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$
17. $3(x^2+4)^2 \cdot 2x = 6x(x^2+4)^2$
18. $\cos x^4 \cdot 4x^3 = 4x^3 \cos x^4$
19. $D_x(\cos x)^4 = 4(\cos x)^3 \cdot D \cos x = -4 \sin x \cos^3 x$
20. $D(x^2+4x)^{-1/2} = -\frac{1}{2}(x^2+4)^{-3/2} \cdot (2x+4)$
21. $\ln x^3 = 3 \ln x$. 그러므로 미분은 $3/x$ (다른 방법으로, $(1/x^3) \cdot 3x^2 = 3/x$)
22. $D(\ln x)^{-1} = -(\ln x)^{-2} D \ln x = -\frac{1}{x(\ln x)^2}$
23. $-\sin(3-x) \cdot (-1) = \sin(3-x)$
24. $-e^x \csc^2 e^x$
25. $x \cdot \frac{1}{2x+1} \cdot 2 + \ln(2x+1) = \frac{2x}{2x+1} + \ln(2x+1)$
26. $6(3x+4)^5 \cdot 3 = 18(3x+4)^5$
27. $D(\sec 3x^4)^3 = 3(\sec 3x^4)^2 D \sec 3x^4 = 3 \sec^2 3x^4 \sec 3x^4 \tan 3x^4 \cdot 12x^3$
28. $(1/\sin e^x) \cdot D \sin e^x = \frac{e^x \cos e^x}{\sin e^x} = e^x \cot e^x$
29. $\frac{e^x}{x} + e^x \ln x$
30. $D(e^x+1)^{-1} = -(e^x+1)^{-2} e^x = -\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$
31. $-4 \csc 4x \cot 4x$
32. $(4/\ln x) \cdot D \ln x = \frac{4}{x \ln x}$
33. $2x \ln 3$ ($\ln 3$ 은 상수)
34. $\ln |x| = \begin{cases} \ln(-x) & , x < 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$ 이므로 $D \ln |x| = \begin{cases} (1/-x) \cdot (-1), & x < 0 \\ 1/x, & x > 0 \end{cases} = \frac{1}{x}$

35. 연쇄 법칙에 의해 $D_t v^2(t) = 2v(t)v'(t)$ 이다. 그러면 곱 법칙에 의해 $D_t \frac{1}{2}m(t)v^2(t) = \frac{1}{2}m(t) \cdot 2v(t)v'(t) + v^2(t) \cdot \frac{1}{2}m'(t)$ 이다. $m = 5, v = 3, m' = 2, v' = -1$ 로 두면 이 시각에서 (운동 에너지)' = -6을 얻는다. 즉 운동 에너지는 이 순간 초당 6 에너지 단위만큼씩 줄어든다.

$$36. \underbrace{\frac{1}{\ln \ln \cdots \ln 2x}}_{638 \log} \cdot \underbrace{\frac{1}{\ln \ln \cdots \ln 2x}}_{637 \log} \cdot \underbrace{\frac{1}{\ln \ln \cdots \ln 2x}}_{636 \log} \cdots \frac{1}{\ln \ln 2x} \cdot \frac{1}{\ln 2x} \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2$$

37. (a) $-\csc^2 f(x) \cdot f'(x)$

(b) $xf'(x) + f(x)$

(c) $3(f(x))^2 f'(x)$

(d) $\frac{f'(x)}{f(x)}$

(e) $e^{f(x)} f'(x)$

38. $D_{\text{sky}}(3x) = e^{3x}((3x)^3 + 3) \cdot 3$

39.

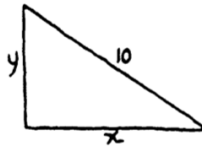
$$w' = 3e^{\sec 2\theta} \cdot \sec 2\theta \tan 2\theta \cdot 2 = 6e^{\sec 2\theta} \sec 2\theta \tan 2\theta$$

$$w'' = 6e^{\sec 2\theta} \sec 2\theta \sec^2 2\theta \cdot 2 + 6e^{\sec 2\theta} \sec 2\theta \tan 2\theta \cdot 2 \tan 2\theta + 6e^{\sec 2\theta} \cdot \sec 2\theta \tan 2\theta \cdot 2 \cdot \sec 2\theta \tan 2\theta \\ = 12 \sec 2\theta e^{\sec 2\theta} (\sec^2 2\theta + \tan^2 2\theta + \sec 2\theta \tan^2 2\theta)$$

40. $y' = 4(2-x)^3 \cdot (-1)$ 이므로 $x = 3$ 이면 $y' = 4$ 이다. 접선의 기울기는 4이고 접선의 방정식은 $y - 1 = 4(x - 3)$ 이다. 법선의 기울기는 $-\frac{1}{4}$ 이고 법선의 방정식은 $y - 1 = -\frac{1}{4}(x - 3)$ 이다.

41. 1계도 함수는 $-(2+3x)^{-2} \cdot 3$, 2계도 함수는 $2(2+3x)^{-3} \cdot 3 \cdot 3$, 3계도 함수는 $-3 \cdot 2(2+3x)^{-4} \cdot 3^3$, ..., 99계도 함수는 $\frac{-99! \times 3^{99}}{(2+3x)^{100}}$, 100계도 함수는 $\frac{100! \times 3^{100}}{(2+3x)^{101}}$

42. 아래 그림으로부터 $y = \sqrt{100 - x^2}$ 이다. 그러면 $y' = \frac{1}{2}(100 - x^2)^{-1/2} \cdot (-2x) = -x/\sqrt{100 - x^2}$ 이다. $x = 1$ 이면 $y' = -1/\sqrt{99}$ 이고 $x = 9$ 이면 $y' = -9/\sqrt{19}$ 이다. 사다리가 미끄러지기 시작할 때, x 는 1정도 작은 값이고 y 는 $1/\sqrt{99}$ m/sec 정도로 느리게 감소한다. 사다리가 거의 눕혀져 평행이 되면 $x = 9$ 가 되고 y 는 $9/\sqrt{19}$ m/sec 정도로 더 빠르게 감소한다.



3.7 음함수 미분법과 로그 미분법

1. (a) $y' = x \cos y \cdot y' + \sin y$, 그러므로 $y' = \sin y / (1 - x \cos y)$

(b) $1 + y' = y \sec^2 y \cdot y' + \tan y \cdot y' + x \sec^2 x + \tan x$ 그러므로

$$y' = \frac{x \sec^2 x + \tan x - 1}{1 - y \sec^2 y - \tan y}$$

2.

$$\begin{aligned}
 y' &= -\sin(x^2 + y^2) \cdot (2x + 2yy') \\
 y'(1 + 2y \sin(x^2 + y^2)) &= -2x \sin(x^2 + y^2) \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{-2x \sin(x^2 + y^2)}{1 + 2y \sin(x^2 + y^2)} \\
 \frac{dx}{dy} &= \frac{1}{dy/dx} = \frac{1 + 2y \sin(x^2 + y^2)}{-2x \sin(x^2 + y^2)}
 \end{aligned}$$

3. (a) • 먼저, 양함수로 표현하면 $y = -\sqrt{1-x^2}$ 이다. (여기서 마이너스 부호를 선택한 이유는 점 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$ 이 아래쪽 반원 위에 있고 여기서 y 값은 음수이기 때문) 그러면 $y' = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2} \cdot (-2x) = x/\sqrt{1-x^2}$ 이다. $x = \frac{1}{2}$ 이면 $y' = 1/\sqrt{3}$ 이고, 접선의 방정식은 $y + \frac{1}{2}\sqrt{3} = (1/\sqrt{3})(x - \frac{1}{2})$, 즉 $\sqrt{3}y - x = -2$ 이다.

- 음함수 미분을 이용하면, $2x + 2yy' = 0$, $y' = -x/y$ 이다. $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ 이면, $y' = 1/\sqrt{3}$ 이고, 나머지 과정은 위와 같다.

- (b) • 먼저, 양함수로 표현하면 $\sqrt{y} = 3 - \sqrt{x}$, $y = (3 - \sqrt{x})^2$ 이고 따라서 $y' = 2(3 - \sqrt{x}) \cdot (-1/2\sqrt{x})$ 이다. $x = 1$ 이면 $y' = -2$ 이고 접선의 방정식은 $y - 4 = -2(x - 1)$, 즉 $2x + y = 6$ 이다.

- 음함수 미분을 이용하면, $1/2\sqrt{x} + y'/2\sqrt{y} = 0$, $y' = -\sqrt{y}/\sqrt{x}$ 이다. $x = 1, y = 4$ 이면 $y' = -2$ 이고 나머지 과정은 위와 같다.

4. $\frac{1}{y}y' = -(xy' + y)$, $y' = \frac{-y^2}{1+xy}$. $x = 0$ 일 때 y' 값을 구하려면 $x = 0$ 일 때 y 값이 필요하다. $x = 0$ 이면 $\ln y = 1$, 즉 $y = e$. 그러므로 $y' = f'(0) = -e^2$.

5. 타원에 대해 $8x + 18yy' = 0$, 즉 $y' = -4x/9y$ 이고, 쌍곡선에 대해서는 $2x - 2yy' = 0$, 즉 $y' = x/y$ 이다. 따라서 기울기들의 곱은 $-4x^2/9y^2$ 이다. $4x^2 + 9y^2 = 72$ 와 $x^2 - y^2 = 5$ 를 연립하여 풀면 교차점은 $(-3, 2), (-3, -2), (3, 2), (3, -2)$ 이다. 이 x, y 값들에 대해 기울기의 곱은 -1 이므로 두 곡선은 직교한다.

6. $e^{xy} \cdot (xy' + y) = y'$ 이므로 $y' = \frac{ye^{xy}}{1 - xe^{xy}}$ 이고 $e^{xy} = y$ 이므로 $y' = \frac{y^2}{1 - xy}$ 이다. 따라서 $(1 - xy)y' = (1 - xy)\frac{y^2}{1 - xy} = y^2$ 이다.

7. (a)

$$\begin{aligned}
 y &= x^3 \sin x \cdot (x^2 + 4)^{-1} \\
 y' &= x^3 \sin x \cdot (-(x^2 + 4)^{-2}) \cdot 2x + x^3 \cos x \cdot (x^2 + 4)^{-1} + 3x^2 \sin x \cdot (x^2 + 4)^{-1} \\
 &= \frac{-2x^4 \sin x}{(x^2 + 4)^2} + \frac{x^3 \cos x}{x^2 + 4} + \frac{3x^2 \sin x}{x^2 + 4}
 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\ln y &= 3 \ln x + \ln \sin x - \ln(x^2 + 4), \\ \frac{1}{y} y' &= \frac{3}{x} + \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x - \frac{2x}{x^2 + 4}, \\ y' &= y \left(\frac{3}{x} + \cot x - \frac{2x}{x^2 + 4} \right)\end{aligned}$$

y 에 $x^3 \sin x (x^2 + 4)^{-1}$ 을 대입하면 (a)의 답과 같아진다.

8. (a) $y = 2^x$ 이면 $\ln y = x \ln 2$, 미분하면 $(1/y)y' = \ln 2$, 즉 $y' = y \ln 2 = 2^x \ln 2$
(b) $y = x^x$ 이면 $\ln y = x \ln x$, 미분하면 $y'/y = x(1/x) + \ln x$, 즉 $y' = y + y \ln x = x^x + x^x \ln x$
(c) $y = x^{\sin x}$ 이면 $\ln y = \sin x \ln x$, 미분하면 $(1/y)y' = (\sin x)(1/x) + \cos x \ln x$, 즉 $y' = y \left(\frac{\sin x}{x} + \cos x \ln x \right) = x^{\sin x} \left(\frac{\sin x}{x} + \cos x \ln x \right)$
(d) $3x^2$
(e) $4(2x+3)^3 \cdot 2 = 8(2x+3)^3$
(f) $y = 4^{2x+3}$ 이면 $\ln y = (2x+3) \ln 4$, 미분하면 $(1/y)y' = 2 \ln 4$, 즉 $y' = 2y \ln 4 = 2 \cdot 4^{2x+3} \ln 4$
(g) e^x
(h) $y = (2x+3)^{4x}$ 이면 $\ln y = 4x \ln(2x+3)$, 미분하면 $(1/y)y' = 4x \cdot \frac{1}{2x+3} \cdot 2 + 4 \ln(2x+3)$,
즉 $y' = (2x+3)^{4x} \left(\frac{8x}{2x+3} + 4 \ln(2x+3) \right)$

3.8 역미분

1. (a) $-3 \cos x + C$
(b) $-\frac{1}{3} \cos 3x + C$
(c) $u^5/5 + C$
(d) $\pi \sec(x/\pi) + C$
(e) $t^{-2}/(-2) + C = -1/2t^2 + C$
(f) $\ln |x| + C$
(g) $x^{-4}/(-4) + C = -1/4x^4 + C$
(h) $\frac{2}{3}x^{3/2} + C$
(i) $x^{1/2}/\frac{1}{2} + C = 2\sqrt{x} + C$
(j) $x^9/9 + C$
(k) $\frac{1}{2}x^{-1}/(-1) + C = -\frac{1}{2x} + C$
(l) $4x^{-1}/(-1) + C = -\frac{4}{x} + C$
2. $f(x) = -\cos x + \frac{1}{3}x^3 + C$. $f(0) = 10$ 으로부터 $10 = -1 + C$, 즉 $C = 11$. 따라서 $f(x) = -\cos x + \frac{1}{3}x^3 + 11$.

3. $f''(x) = 5x + A$, $f'(x) = \frac{5x^2}{2} + Ax + B$, $f(x) = \frac{5}{6}x^3 + \frac{A}{2}x^2 + Bx + C$
4. s 가 시간 t 일 때 위치라면, $s'(t) = 7 - t^2$ 이고 $s(t) = 7t - \frac{1}{3}t^3 + C$. $s(3) = 4$ 로 두면 $4 = 21 - 9 + C$, 즉 $C = -8$ 이다. 그러므로 $s(t) = 7t - \frac{1}{3}t^3 - 8$. 따라서 $t = 6$ 이면 $s = -38$.
5. $y = x^2 + 3x + C$, $-2 = 1 + 3 + C$, $C = -6$, $y = x^2 + 3x - 6$
6. 그렇지 않다. $D \ln \sin x = (1/\sin x) \cdot D \sin x = (1/\sin x) \cos x$ 이기 때문이다.
7. (a) 그렇지 않다. $D \sin^2 x = 2 \sin x \cos x$ 이기 때문이다.
 (b) 그렇지 않다. $D \sin 2x = \cos 2x \cdot 2$ 이기 때문이다 (올바른 역미분은 $\frac{1}{2} \sin 2x + C$ 이다)
 (c) 그렇다.
 (d) 그렇지 않다. $D \sin x^2 = \cos x^2 \cdot 2x$ 이기 때문이다.
8. y 를 시간 t 일 때 높이라고 하자. 그러면 $y'' = -32$, $y' = -32t + C$ 이다. $t = 0$ 일 때 $y' = 40$ 이므로 $40 = 0 + C$ 로부터 $C = 40$ 이다. 그러면 $y = -16t^2 + 40t + K$ 이다. $t = 0$ 일 때 $y = 24$ 이므로 $24 = K$ 이고 $y = -16t^2 + 40t + 24$ 이다. 돌은 속도가 0일 때 (속도가 양수에서 음수로 변할 때) 꼭대기에 도달한다. 그러므로 $-32t + 40 = 0$ 으로부터 $t = \frac{5}{4}$ 이고 이 때 $y = 49$ 이다. 돌은 $y = 0$ 이 될 때 지면에 닿는다. 따라서 $-16t^2 + 40t + 24 = 0$, $2t^2 - 5t - 3 = 0$ 으로부터 $t = -\frac{1}{2}$ 또는 $t = 3$ 을 얻고 $t > 0$ 이어야 하므로 $t = 3$ 초 후에 땅에 떨어진다.
9. $-3 \ln |3 - x|$
10. 구할 수 없다.
11. $5 \ln |x|$
12. $\ln |2 + x|$
13. 구할 수 없다.
14. $(7/\pi) \sin \pi x$
15. 구할 수 없다.
16. $\frac{1}{5}(\frac{1}{3}x^3 + 3x^2)$
17. 구할 수 없다.
18. $\frac{5(3x+6)^{-1}}{-1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{-5}{3(3x+6)}$
19. $4 \frac{(2 + \frac{1}{4}x)^{3/2}}{3/2} = \frac{8}{3}(2 + \frac{1}{4}x)^{3/2}$
20. 구할 수 없다.
21. $\frac{3}{2\pi} \sin \frac{2\pi x}{3}$
22. $x^7/42$
23. $-3e^{-x}$

24. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}$
25. πx
26. $\frac{1}{3}(3x+4)^5/5$
27. $x^4/8$
28. $\frac{1}{2}(x^{-2}/(-2)) = -\frac{1}{4x^2}$
29. $\frac{1}{5}(x^{-2}/(-2)) + C = -\frac{1}{10x^2} + C$
30. $t^{1/2}/\frac{1}{2} + C = 2\sqrt{t} + C$
31. $\frac{3}{4}x^4 + C$
32. 구할 수 없다.
33. $2x - x^3 + C$
34. $-\frac{1}{3} \cdot (2-3x)^{-2}/(-2) + C = \frac{1}{6(2-3x)^2} + C$
35. $x + C$
36. $-\frac{1}{3}\cos 3u + C$
37. 구할 수 없다.
38. $-\frac{1}{2}e^{-2x} + C$
39. 구할 수 없다.
40. $-1/x^3 + C$
41. $2 \cdot \frac{1}{4} \ln|3+4x| + C = \frac{1}{2} \ln|3+4x| + C$
42. 구할 수 없다.
43. $-(3-x)^{3/2}/\frac{3}{2} + C = -\frac{2}{3}(3-x)^{3/2} + C$
44. $\frac{1}{2}[(5x^4/4) + 3x] + C = \frac{5}{8}x^4 + \frac{3}{2}x + C$